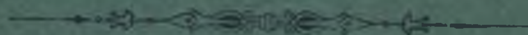
Höhere Bürgerschule
Bretten.



Classe IV

Unterrichts-Gegenstand: Algebra

Schüler: Karl Weingärtner

1874.

Von den Potenzen.

1. Ein Product aus lauter gleichen Factoren heißt eine Potenz. Einer der gleichen Factoren heißt die Basis, Grundzahl od. Dignand, und die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Factoren angibt, der Exponent der Potenz. In der Potenz a^n ist a die Basis und n der Exponent.

2. Setzt man eine Zahl zweimal als Factor an, so erhält man die zweite Potenz oder das Quadrat einer Zahl; drei gleiche Factoren geben die dritte Potenz u. s. w. die dritte Potenz wird auch der Kubus einer Zahl genannt.

3. Gleiche Potenzen sind solche, bei welchen sowohl die Grundzahlen, als auch die Exponenten untereinander gleich sind; Gleichbasig heißen sie, wenn sie nur einerlei Grundzahlen, und gleich-

[illegible] wenn sie nur einerlei Exponenten haben.

4, Die Potenzen werden nach ihren Exponenten in ganze, gebrochene, positive, negative und Null-Potenzen eingetheilt. z. B.

Ganze Potenzen: a^3, b^2, x^7;
Gebrochene " : $a^{\frac{3}{4}}, b^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{n}}$;
positive " : b^3, a^5, x^{17};
negative " : $b^{-2}, a^{-3}, b^{-5}, x^{-n}$;

5, Ein Product wird potenzirt, indem man das Product der Potenzen der einzelnen Factoren bildet. Potenzirung eines Productes ist Potenzirung eines jeden Factors. z. B.

$$(abc)^3 = a^3b^3c^3$$

Beweis. $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = aaa \cdot bbb \cdot ccc = a^3b^3c^3$;

6, Ein Bruch wird potenzirt, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner potenzirt.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4};$$

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}$;

Addition und Subtraction der Potenzen.

1, Sowohl für gleiche als ungleiche Potenzen gelten genau die früher für die Addition und Subtraction allgemeiner Zahlzeichen angegebenen Regeln.

Beispiele.

1, $3a^4 + 7a^4 = 10a^4$;

2, $5a^2b^3 + 7a^2b^3 = 12a^2b^3$;

3, $14x^8 - 3x^8 = 11x^8$;

4, $6m^3n^3 - 14m^3n^3 = -8m^3n^3$;

5, $4a^m - 3b^n + 8a^m - 7b^n = +12a^m - 10b^n$;

6,
$$\begin{array}{r} 3a^3 - 4b^5 + 1c^2 \\ 8a^3 - 7b^5 + 4c^2 \\ 5a^3 + 9b^5 - 12c^2 \\ \hline 16a^3 - 2b^5 - 7c^2 \end{array}$$;

7, $4a^n + 5a^n - 6a^n = 3a^n$;

8, $8x^3 - 7y^4 + 9x^3 + 12y^4 = 17x^3 + 5y^4$;

9, $15a^3 + 7b^8 - 9c^5 + 8d^4$
$-(6a^3 - 3b^8 - 9c^5 \quad -7f^6$
$9a^3 + 10b^8 \quad + 8d^4 + 7f^6$.

10, $6a^5 - 7b^6 + 8c^3$
$-(4a^5 - 9b^6 - 18c^3$
$2a^5 + 2b^6 + 26c^3$.

11, $(abc)^2 = abc \cdot abc = aa \cdot bb \cdot cc = a^2b^2c^2$,
$(abcd)^2 = abcd \cdot abcd = aa \cdot bb \cdot cc \cdot dd = a^2b^2c^2d^2$;
$(abc)^x = a^x \cdot b^x \cdot c^x$;

12, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{mm}{nn} = \frac{m^2}{n^2}$;

$\left(\frac{m}{n}\right)^x = \frac{m^x}{n^x}$;

13, $a^2 + a^2 = 2a^2$;
$2a^2 + a^2 = 3a^2$;
$na^2 + a^2 = (n+1)a^2$;
$ma^x + na^x = (m+n)a^x$;
$4a^3 - a^3 = 3a^3$;
$ma^x - na^x = (m-n)a^x$;

14, $7a^2 + 5a^2 + 3a^2 = 15a^2$
$ma^2 - nb^3 = (ma^2 - nb^3)$

$$ax^2+bx^2-cx^2=(a+b-c)x^2;$$

$$9a^5+7a^5-6a^5-4a^5=6a^5;$$

$$a^4-2b^3+a^2-b^3+a=a^4-3b^3+2a^2;$$

$$a^2+b^3-4\tfrac{1}{4}a^2+2b^3=-3\tfrac{1}{4}a^2+3b^3;$$

15. $2ax^n-3bx^n-x^n+4dx^n=(2a-3b-1$
$+4d)x^n;$

16. $3a^{-7}+10a^{-7}-5a^{-7}+a^2b=8a^{-7}+a^2b;$

17. $\frac{6a^2}{b^3}-\frac{8a^2}{b^3}+\frac{12a^2}{b^3}+7a^5=\frac{10a^2-7a^5}{b^3};$

$$\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a-c}=\frac{a^2-ac+ac+c^2}{ac-c^2}=\frac{a^2+c^2}{ac-c^2};$$

$$\frac{ax}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{ax-(a^2-2ax+x^2)}{a^2-x^2}=$$

$$=\frac{-a^2+3ax-x^2}{a^2-x^2};$$

18. $\frac{7x^2}{y^2}-3\frac{x^2}{y^2}-5b\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{5x^2}{y^2}-\frac{5bx}{y}-\frac{x^2}{y^2}$

19. $a^m-3a^{m-1}=(a^m-a-3a^m-1;$

20. $a^m-a^{m-1}b=(a-b)a^{m-1}$

21. $-2a^{m} + 3a^{m-1}b = -(2a - 3b)a^{m-1}$;

22. $-ax^{-n} + bx^{-n} - 3x^{-n} + \frac{5}{2}dx^{-n} =$
$(a + b - 3 + \frac{5}{2}d)x^{-n}$;

23. $\left(3\frac{2}{8}\left(\frac{8}{12}\right)a^3 - 4\frac{1}{6}\left(\frac{3}{18}\right)a^2x - \frac{3}{8}\left(\frac{9}{24}\right)ax^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{8}{96}\right)x^3\right)$
$-\left(5\frac{1}{4}\left(\frac{3}{12}\right)a^3 \qquad + \frac{5}{6}(20)\,ax^2 - \frac{15}{16}(90)\,x^3\right)$
$-\left(2\frac{1}{5}\left(\frac{11}{60}\right)a^3 + \frac{2}{9}(4)\,a^2x - \frac{5}{24}\left(\frac{5}{24}\right)ax^2 + \frac{3}{32}(9)\,x^3\right)$
$+\left(\qquad \frac{1}{6}(3)\,a^2x \qquad - \frac{2}{3}(64)\,x^3\right)$

$-3\frac{47}{60}a^3 - 4\frac{2}{9}a^2x \qquad + 1\frac{14}{96}x^3$

24. $\left(3\frac{1}{2}\left(\frac{6}{12}\right)a^6x - 5\frac{1}{3}\left(\frac{5}{15}\right)a^5x^2 + 14\frac{1}{4}\left(\frac{9}{36}\right)a^4x^3 - 2\frac{1}{3}\left(\frac{10}{30}\right)a^3x^4 - 16\frac{1}{2}a^2x^5 + \frac{5}{4}\left(\frac{6}{24}\right)ax^6\right)$
$+\left(2\frac{1}{3}(4)\,a^6x \qquad + 4\frac{1}{9}(4)\,a^4x^3 - 6\frac{1}{5}(6)\,a^3x^4 \qquad - 2\frac{1}{3}(8)\,ax^6\right)$
$-\left(4\frac{1}{4}(3)\,a^6x + 4\frac{2}{5}(6)\,a^5x^2 - 1\frac{1}{3}(12)\,a^4x^3 + 2\frac{1}{3}(15)\,a^3x^4 \qquad - \frac{1}{8}(3)\,ax^6\right)$

$1\frac{7}{12}a^6x - 9\frac{11}{15}a^5x^2 + 12\frac{25}{36}a^4x^3 - 11\frac{1}{30}a^3x^4 - 16\frac{1}{2}a^2x^5 - 1\frac{23}{24}ax^6$

25. $\left(2\frac{1}{4}\left(\frac{3}{12}\right)b^5 - 4\frac{2}{3}\left(\frac{32}{48}\right)b^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{24}\right)b^3 - 5\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}\right)b^2 + 6\frac{2}{7}\left(\frac{10}{35}\right)b - \frac{3}{8}\left(\frac{9}{24}\right)\right)$.
$+\left(2\frac{5}{12}(5)\,b^5 + 1\frac{1}{2}(24)\,b^4 - 3\frac{5}{8}(15)\,b^3 \qquad + 2\frac{1}{5}\left(\frac{7}{35}\right)b - 4\frac{7}{12}(14)\right)$
$-\left(\qquad 3\frac{5}{16}(15)\,b^4 + 6\frac{1}{2}(12)\,b^3 + 2\frac{1}{4}(4)\,b^2 - 21\,b + 5\frac{1}{3}(8)\right)$

$\left(4\frac{2}{3}b^5 - 3\frac{23}{48}b^4 - 9\frac{23}{24}b^3 - 7\frac{3}{4}b^2 + 29\frac{17}{35}b - 10\frac{7}{24}\right)$

26, $\left(\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\right)x^6 - \frac{3}{8}\left(\frac{3}{8}\right)x^5y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^4y^2 + \frac{7}{4}\left(\frac{21}{12}\right)x^3y^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{9}{6}\right)x^2y^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{12}\right)xy^5 - \frac{7}{12}y^6\right)$

$+\left(\frac{3}{2}(6)x^6 + \frac{3}{4}(6)x^5y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^4y^2 - \frac{7}{3}(28)x^3y^3 \quad + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{12}\right)xy^5 - \frac{5}{12}y^6\right)$

$-\left(\frac{7}{4}\left(\frac{7}{4}\right)x^6 + \frac{3}{2}(12)x^5y \quad + \frac{17}{4}(51)x^3y^3 - \frac{5}{3}\left(\frac{10}{6}\right)x^2y^4 + \frac{5}{12}\left(\frac{5}{12}\right)xy^5 + \frac{1}{12}y^6\right)$

$x^6 - 1\frac{1}{8}x^5y \quad - 4\frac{5}{6}x^3y^3 + 3\frac{1}{6}x^2y^4 \quad - 1\frac{1}{12}y^6.$

27, $\left(\frac{5}{2}\left(\frac{20}{8}\right)y^{10} - \frac{3}{4}\left(\frac{9}{12}\right)y^8 + \frac{7}{2}\left(\frac{42}{12}\right)y^6 - 2\frac{1}{4}\left(\frac{3}{12}\right)y^4 + y^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{32}{48}\right) + \frac{4}{y^2}\right).$

$+\left(\frac{1}{4}(2)\,y^{10} + \frac{1}{3}(4)y^8 + \frac{1}{4}(3)y^6 + \frac{1}{3}(4)y^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{12}\right)y^2 - \frac{7}{4}(84) + \frac{5}{y^2}\right)$

$-\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)y^{10} + \frac{2}{3}(8)y^8 - \frac{1}{3}(4)y^6. \quad + \frac{5}{12}y^2 + \frac{11}{16}(33) - \frac{1}{3y^2}\right)$

$2\frac{5}{8}y^{10} - 1\frac{1}{12}y^8 + 4\frac{1}{12}y^6 - 2\frac{7}{12}y^4 + \frac{1}{4}y^2 - 3\frac{5}{48}$

28, $\left(\frac{6}{5}\left(\frac{18}{15}\right)x^5 - \frac{9}{4}\left(\frac{18}{8}\right)x^4 + \frac{3}{8}\left(\frac{15}{40}\right)x^3 - \frac{11}{2}\left(\frac{66}{12}\right)x^2 + 10\,x - \frac{22}{3}\left(\frac{110}{15}\right)\right)$

$+\left(\frac{10}{3}(50)x^5 + \frac{13}{2}(52)x^4 - \frac{12}{5}(96)x^3 + \frac{17}{4}(51)x^2 - \frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}\right)x + 8\right)$

$+\left(\frac{16}{3}(80)x^5 + \frac{23}{8}(23)x^4 + \frac{11}{2}(44)x^3 - \frac{13}{6}(26)x^2 + 4\,x - \frac{17}{5}(51)\right)$

$\left(9\frac{13}{15}x^5 + 1\frac{3}{8}x^4 - \frac{37}{40}x^3 - 3\frac{5}{12}x^2 + 6\frac{1}{2}x - 2\frac{11}{15}\right)$

29. $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{10}\right)a^{3m-n} + \frac{5}{3}\left(\frac{10}{6}\right)a^{2m-n}b^{m} + \frac{1}{8}a^{m-n}b^{2m} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{12}\right)a^{-n}b^{3m} - \frac{2}{3}a^{-(m+n)}b^{4m}$

$-\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)a^{3m-n} + \frac{1}{4}\left(3\right)a^{2m-n}b^{m} \qquad + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{[illegible]}\right)a^{-n}b^{3m} + \frac{2}{3}a^{-(m+n)}b^{4m}$

$\frac{3}{10}a^{3m-n} + \frac{7}{6}a^{2m-n}b^{m} + \frac{1}{8}a^{m-n}b^{2m} - \frac{5}{12}a^{-n}b^{3m} - 1\frac{1}{3}a^{-(m+n)}b^{4m}.$

30. $(3{,}85a^{3} - 0{,}4a^{2}c + 1{,}6ac^{2} - 2c^{3})$

$+(2{,}8a^{3} \qquad - 5{,}04ac^{2} - 0{,}3c^{3})$

$-(7{,}4a^{3} - 13{,}2a^{2}c + 8{,}01ac^{2} - 0{,}001c^{3})$

$-(\qquad + 0{,}81a^{2}c - 0{,}3ac^{2} + 0{,}14c^{3})$

$-1{,}55a^{3} + 11{,}99a^{2}c - 1{,}08ac^{2} - 2{,}439c^{3}$

8. Multiplikation der Potenzen.

Das Produkt zweier oder mehrerer Potenzen mit einerlei Basis wird erhalten, wenn man die Exponenten der Grundzahlen addiert, die Basis aber unverändert läßt. z. B.

$$a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6;$$

Beweis: $a^2 \cdot a^4 = aa \cdot aaaa = aaaaaa = a^6$;

9. Aufgaben.

1) $3a^4 \cdot 5a^7 = 15a^{11}$

2) $4a^6 \cdot 3a^8 \cdot 2a = 24a^{6+8+1} = 24a^{15}$;

3) $\frac{3}{4}a^2b^4c^5 \cdot \frac{5}{2}a^3bc^7d^4 = \frac{15}{8}a^5b^5c^{12}d^4$;

4) $2a^3b^5 \cdot 6a^8b^4 \cdot 5a^3b^2 = 60a^{14}b^{11}$;

5) $\frac{3}{4}a^5b^3c^2 \cdot -\frac{2}{3}a^3b^4c^5 = -\frac{1}{2}a^8b^7c^7$;

6) $-a^{m-n} \cdot -2a^{n-r} \cdot -a^{r-s} = -\frac{2a^m}{a^s}$;

7) $x^{-m} \cdot -3x^3yz^2 \cdot 5x^ry^nz^{-3} =$

8, $a^{m} \cdot a = a^{m+1}$; $a^{m} \cdot a \cdot a = a^{m+1}$;

9, $a^{-m} b^{p} c^{q} \cdot a^{n} b^{-r} c^{s} \cdot a^{n+m} b = a^{2n} b^{+p+1} c^{q+s}$;

$-13a^{-1}c^{-3} \cdot -4a^{-3}b^{-6}c^{2} = -\frac{52}{a^{4}b^{6}c}$;

10, $(9a^{2}bc + 21ab^{3} - 17b^{3}c)31a^{4}c^{2} = 279a^{6}bc^{3} + 651a^{5}b^{3}c^{2} - 527a^{4}b^{3}c^{3}$;

11, $(\frac{2}{5}a^{2}x - \frac{7}{9}a^{2}y - \frac{2}{3}a^{2}z)7xyz = 4\frac{1}{5}a^{2}x^{2}yz - 5\frac{4}{9}a^{2}y^{2}xz - 4\frac{2}{3}a^{2}xyz^{2}$;

12, $(-\frac{5}{6}mn + \frac{3}{8}mp - \frac{11}{12}np)24mnp = -20m^{2}n^{2}p + 9m^{2}np^{2} - 22mn^{2}p^{2}$;

13, $(\frac{a^{3}}{b^{2}} - \frac{a^{2}}{bc} + \frac{xy}{c^{2}})\frac{b^{2}c^{2}}{a} = a^{2}c^{2} - abc + \frac{xyb^{2}}{a}$;

14, $(\frac{2a^{2}}{3bc} - \frac{5b^{2}}{18ac} - \frac{c^{2}}{12ab})\frac{6}{7}abc = \frac{4a^{3}}{7} - \frac{5b^{3}}{21} - \frac{1c^{3}}{14}$;

15, $\frac{12abc}{19d^{2}}(\frac{15a^{3}}{16b^{2}c} + \frac{19b^{2}c}{20ad^{2}} - \frac{29a^{2}b}{30c^{2}d}) = \frac{180a^{4}}{304bd} + \frac{3b^{3}c^{2}}{5d^{4}} - \frac{348a^{3}b^{2}}{570d^{3}}$;

b, $$\begin{array}{l}(a+b)\\ \cdot(a+b)\\ \hline a^2+ab\\ \quad +ab+b^2\\ \hline a^2+2ab+b^2;\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(a+b)\\ \cdot(a-b)\\ \hline a^2+ab\\ \quad -ab-b^2\\ \hline a^2-b^2;\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(a^2-ab+b^2)\\ \cdot(a+b)\\ \hline a^3-a^2b+ab^2\\ \quad +a^2b+ab^2+b^3\\ \hline a^3+b^3\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(a^2+ab+b^2)\\ \cdot(a-b)\\ \hline a^3+a^2b+ab^2\\ \quad -a^2b-ab^2-b^2\\ \hline a^3-b^2\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(a^3-a^2b+ab^2-b^3)\\ \cdot(a+b)\\ \hline a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3\\ \quad +a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4\\ \hline a^4-b^4;\end{array}$$

$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
$\cdot (a - b)$

$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$
$- a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5$

$a^5 - b^5;$

17, $(a + b - c)$
$\cdot (a - b + c)$

$a^2 + ab - ac$
$- ab \qquad - b^2 + bc$
$+ ac \qquad + bc - c^2$

$a^2 \qquad - b^2 + 2bc - c^2$

18, $(a^4 - b + c^2)$
$\cdot (a^3 - b^2 - 3c)$

$a^7 - a^3b + a^3c^2 - a^4b^2 + b^3 - b^2c^2 - a^4 3c$
$+ b3c - 3c^3;$

19, $(a^2 - 2bc + c^2)$
$\cdot (a^2 - 4bc + c^2)$

$a^4 - a^2 2bc + a^2c^2 + 8b^2c^2 - 4bc^3$
$- a^2 4bc \quad * \quad + a^2c^2 \qquad - 2bc^3 + c^4;$

$a^4 - 2a^2 6bc + 2a^2c^2 + 8b^2c^2 - 6bc^3 + c^4;$

20, $(a^2-2bc+c^2)$
$\cdot(a^2+4bc+c^2)$

$a^4-a^2 2bc+a^2c^2$
$+a^2 4bc+a^2c^2-8b^2c^2+4bc^3$
$-2bc^3+c^4$

$a^4+2a^2bc+2a^2c^2-8b^2c^2+bc^3+c^4$;

21, $(5a^2-7ab-3b^2)$
$\cdot(3a^2+4ab-2b^2)$

$15a^4-21a^3b-9a^2b^2$
$+20a^3b-28a^2b^2-12ab^3$
$-10a^2b^2+14ab^3+6b^4$

$15a^4-a^3b-47a^2b^2+2ab^3+6b^4$;

22, $(2a^3-5a^2b+8ab^2-11b^3)$
$\cdot(3a^2+5ab+7b^2)$

$6a^5-15a^4b+24a^3b^2-33a^2b^3$
$+10a^4b-25a^3b^2+40a^2b^3-55ab^4$
$+40a^3b^2-35a^2b^3+56ab^4-77b^5$

$6a^5-5a^4b-13a^3b^2-28a^2b^3+ab^4-77b^5$;

23, (x^2+x-1)

$\cdot(x^2-x-1)$

$$x^4+x^3-x^2$$
$$-x^3-x^2+x$$
$$-x^2-x+1$$

$$x^4-3x^2+1;$$

24, $(1-2x+x^2)$

$\cdot(1-3x+3x^2-x^3)$

$$1-2x+x^2$$
$$-3x+6x^2-3x^3$$
$$+3x^2-6x^3+3x^4$$
$$-x^3+2x^4-x^5$$

$$1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5;$$

25, (x^3-x^2-2x+1)

$\cdot(x^3+x^2-2x-1)$

$$x^6-x^5-2x^4+x^3$$
$$+x^5-x^4-2x^3+x^2$$
$$-2x^4+2x^3+4x^2-2x$$
$$-x^3+x^2+2x-1$$

$$x^6-5x^4+6x^2-1;$$

26. $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)\cdot(x-y)$

$$x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4$$
$$-x^4y-x^3y^2-x^2y^3-xy^4-y^5$$

$$x^5-y^5;$$

27. $(x^4+x^3-3x^2-2x+1)\cdot(x^4-x^3-3x^2+2x-1)$

$$x^8+x^7-3x^6-2x^5+x^4$$
$$-x^7-x^6+3x^5+2x^4-x^3$$
$$-3x^6-3x^5+9x^4+6x^3+3x^2$$
$$+2x^5+2x^4-6x^3-4x^2+2x$$
$$-x^4-x^3+3x^2+2x-1$$

$$x^8-7x^6+15x^4-10x^2-1;$$

28. $(x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1)\cdot(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)$

$$x^{10}-x^9-4x^8+3x^7+3x^6-x^5$$
$$+x^9-x^8-4x^7+3x^6+3x^5-x^4$$
$$-4x^8+4x^7+16x^6-4x^5-12x^4+4x^3$$
$$-3x^7+3x^6+12x^5-9x^4-9x^3+3x^2$$
$$+3x^6-3x^5-12x^4+9x^3+9x^2-3x$$
$$+x^5-x^4-4x^3+3x^2+3x-1;$$

$$x^{10}-9x^8-28x^6-35x^4+15x^2-1;$$

29, $(2a^4 + 5a^3b - a^2b^2 + 4ab^3)$
$\cdot(3a^2 + 8ab - b^2)$

$6a^6 + 15a^5b - 3a^4b^2 + 12a^3b^3$
$+ 16a^5b + 40a^4b^2 - 8a^3b^3 + 32a^2b^4$
$- 2a^4b^2 - 5a^3b^3 + a^2b^4 - 4ab^5$

$6a^6 + 31a^5b + 35a^4b^2 + a^3b^3 + 33a^2b^4 - 4ab^5$

30, $(6a^r + 3b^s)$
$\cdot(8a^r - b^n)$

$48a^{2r} + 24a^rb^s - 6a^rb^n - 6b^{s+n};$
~~+24~~

31,

31.) $(a^{10n-10} - 5a^{8n-8} + 10a^{6n-6} - 10a^{4n-4} + 5a^{2n-2} - 1)$
$\cdot(3a^{4n+6} - 6a^{2n+8} + 3a^{10})$

$3a^{14n-4} - 15a^{12n-2} + 30a^{10n} - 30a^{8n+2} + 15a^{6n+4} - 3a^{4n+6}$
$- 6a^{12n-2} + 30a^{10n} - 60a^{8n+2} + 60a^{6n+4} - 30a^{4n+6} + 6a^{2n+8}$
$+ 3a^{10n} - 15a^{8n+2} + 30a^{6n+4} - 30a^{4n+6} + 30a^{2n+8} - 3a^{10}$

$3a^{14n-4} - 21a^{12n-2} + 63a^{10n} - 105a^{8n+2} + 105a^{6n+4} - 63a^{4n+6} + 21a^{2n+8} - 3a^{10}$

32.) $(a^{-3}b^2 - 3a^{-2}b^3 + 3a^{-1}b^4 - 4b^5)$
$\cdot(-7a^{-1}b^{-3})$

$-7a^{-4}b^{-1} + 21a^{-3} - 21a^{-2}b + 28a^{-1}b^2 = \frac{7}{a^4b} + \frac{21b}{a^3} * -\frac{21b}{a^2} + \frac{28b^2}{a}$,

33.) $(\frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{8}y^3)$
$\cdot(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}y^2)$

$\frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{9}x^4y - \frac{1}{3}x^3y^2 + \frac{1}{4}x^2y^3$
$- \frac{3}{10}x^4y - \frac{1}{3}x^3y^2 + x^2y^3 - \frac{3}{16}xy^4$
$+ \frac{9}{10}x^3y^2 + x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^4 + \frac{9}{16}y^5$

$\frac{2}{5}x^5 + \frac{13}{90}x^4y + \frac{7}{30}x^3y^2 + \frac{3}{2}x^2y^3 - \frac{15}{16}xy^4 + \frac{9}{16}y^5$;

34) $\left(\frac{3}{2}a^4 - \frac{2}{5}a^2b^2 + \frac{11}{3}ab^3 - \frac{3}{4}b^4\right)$
$\cdot\left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{2}{3}ab^2 + \frac{4}{5}b^3\right)$

$2a^7 - \frac{8}{15}a^5b^2 + \frac{44}{9}a^4b^3 - a^3b^4$
$- a^5b^2 \qquad + \frac{4}{15}a^3b^4 - \frac{22}{9}a^2b^5 + \frac{1}{2}ab^6$
$+ \frac{6}{5}a^4b^3 \qquad - \frac{8}{25}a^2b^5 + \frac{44}{15}ab^6 - \frac{3}{5}b^7$

$2a^7 - 1\frac{8}{15}a^5b^2 + \frac{274}{45}a^4b^3 - \frac{11}{15}a^3b^4 - \frac{622}{225}a^2b^5 + \frac{103}{30}ab^6 - \frac{3}{5}b^7$

---

35) $\left(\frac{3}{2}a^3x^{-2} - \frac{2}{3}a^2x^{-1} + \frac{1}{4}a - \frac{5}{8}x\right)$
$\cdot\left(\frac{5}{3}a^{-1}x - \frac{3}{2}a^{-2}x^2 + \frac{1}{6}a^{-3}x^3\right)$

$2\frac{1}{2}a^2x^{-1} - \frac{10}{9}ax + \frac{5}{12}ax - \frac{25}{24}a^{-1}x^2$
$- \frac{9}{4}ax + ax - \frac{3}{8}a^{-1}x^2 + \frac{15}{16}a^{-2}x^3$
$+ \frac{3}{12}ax - \frac{1}{9}a^{-1}x^2 + \frac{1}{24}a^{-2}x^3 - \frac{5}{48}a^{-3}x^4$

$2\frac{1}{2}a^2x^{-1} - \frac{121}{36}a + 1\frac{2}{3}x - 1\frac{19}{36}a^{-1}x^2 + \frac{47}{48}a^{-2}x^3 - \frac{5}{48}a^{-3}x^4.$

36.) $\left(\frac{3}{2}b^{m+1}x^{-n} + \frac{1}{5}b^{m}x^{-n+1} + \frac{2}{3}b^{m-1}x^{-n+2} + \frac{7}{6}b^{m-2}x^{-n+3}\right)$

$\cdot\left(\frac{6}{5}b^{-m}x^{n-1} - \frac{3}{4}b^{-(n+1)}x^{n} + \frac{1}{2}b^{-(m-2)}x^{n+1}\right.$

$\frac{9}{5}bx^{-1} + \frac{6}{25} - \frac{4}{5}b^{-1}x + \frac{7}{5}b^{-2}x^{2}$

$\quad - \frac{9}{8} - \frac{3}{20}b^{-1}x + \frac{1}{2}b^{-2}x^{2} - \frac{7}{8}b^{-3}x^{3}$

$\quad + \frac{3}{4}b^{-1}x + \frac{1}{10}b^{-2}x^{2} - \frac{1}{3}b^{-3}x^{3} + \frac{7}{12}b^{-4}x^{4}$

$\frac{9}{5}bx^{-1} - \frac{177}{200} - \frac{1}{5}b^{-1}x + 2b^{-2}x^{2} - \frac{29}{24}b^{-3}x^{3} + \frac{7}{12}b^{-4}x^{4}$

37.) $\left(\frac{m^3}{n^2} + \frac{2m^2}{n} - \frac{m}{3} + \frac{5n}{4} - \frac{8n^2}{3m}\right)$

$\cdot\left(-\frac{3n^2}{4m^2} + \frac{2n^3}{5m^3} - \frac{2n^4}{3m^4}\right)$

$\frac{3m}{4} - \frac{6n}{4} + \frac{9m^2}{m} - \frac{15n^3}{16m^2} + \frac{24n^4}{12m^3}$

$\quad - \frac{2n}{5} + \frac{4n^2}{5m} - \frac{2n^3}{15m^2} + \frac{1n^4}{2m^3} - \frac{16n^5}{15m^4}$

$\quad + \frac{2n^2}{3m} - \frac{4n^3}{3m^2} + \frac{2n^4}{9m^3} + \frac{5n^5}{6m^4} + \frac{16n^6}{9m^5}$

$\frac{3m}{4} - \frac{19n}{10} + \frac{103n^2}{60m} - \frac{587n^3}{240m^2} + \frac{49n^4}{18m^3} - \frac{19n^5}{10m^4} + \frac{16n^6}{9m^5}$

38, $\left(\frac{2x^3}{5y^2} - \frac{3x^2}{4y} + \frac{6x}{5} - \frac{8y}{3} + \frac{4y^3}{9x}\right)$
$\cdot\left(\frac{3x^2}{5y^2} - \frac{2x}{3y} - \frac{5}{4}\right)$

$$\frac{6x^5}{25y^4} - \frac{9x^4}{20y^3} + \frac{18x^3}{25y^2} - \frac{8x^2}{5y} + \frac{4x}{15}$$
$$- \frac{4x^4}{15y^3} + \frac{1x^3}{2y^2} - \frac{4x^2}{5y} + \frac{16x}{9} - \frac{8y}{27}$$
$$- \frac{1x^3}{2y^2} + \frac{15x^2}{16y} - \frac{3x}{2} + \frac{10y}{3} - \frac{5y^2}{9x};$$

$$\frac{6x^5}{25y^4} - \frac{43x^4}{60y^3} + \frac{18x^3}{25y^2} - \frac{118x^2}{80y} + \frac{49x}{90} + \frac{82y}{27} - \frac{5y^2}{9x};$$

39, $\left(\frac{4c^2}{3a} + \frac{5c^3}{4a^2} - \frac{6c^4}{5a^3}\right)$
$\cdot\left(\frac{5a^3}{6c^2} - \frac{2a^2}{3c} - \frac{8a}{5}\right)$

$$\frac{10a^2}{9} + \frac{25ac}{24} - \frac{30c^2}{30}$$
$$- \frac{8ac}{9} - \frac{5c^2}{6} + \frac{4c^3}{5a}$$
$$- \frac{32c^2}{15} - \frac{4c^3}{2a} + \frac{48c^4}{25a^2}$$

$$\frac{10a^2}{9} + \frac{11ac}{72} - \frac{119c^2}{30} - \frac{6c^3}{5a} + \frac{48c^4}{25a^2}$$

40) $\left(\frac{243x^5}{32y^5} + \frac{27x^3}{8y^3} + \frac{3x}{2y} + \frac{2y}{3x} + \frac{8y^3}{27x^3} + \frac{32y^5}{243x^5}\right)$

$\cdot\left(\frac{3x}{2y} - \frac{2y}{3x}\right)$

$$\frac{729x^6}{64y^6} + \frac{81x^4}{16y^4} + \frac{9x^2}{4y^2} + \frac{6yx}{6yx} + \frac{24xy^2}{54x^2} + \frac{96xy^4}{486x^5}$$

$$- \frac{486x^4}{96y^4} - \frac{54yx^3}{24y^3x} - \frac{6yx}{6yx} - \frac{4y^2}{9x^2} - \frac{16y^4}{81x^4} - \frac{64y^6}{729x^6}$$

$$\frac{729x^6}{64y^6} - \frac{64y^6}{729x^6};$$

Division der Potenzen.

a, Gleiche Potenzen in einander dividirt geben stets als Quotient 1.

$$4^3 : 4^3 = 1$$

$$6a^2 : 6a^2 = 1$$

b, Sollen gleichbasige oder gleichartige Potenzen dividirt werden, so dividire die Coefficienten, behalte den gemeinschaftlichen Dignanden bei, und subtrahire den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendus.

1. z. B. $6a^4 : 2a^3 = 3a^{4-3} = 3a$

Beweis: $6a^4 : 2a^3 = \frac{6a^4}{2a^3} = \frac{6 \cdot aaaa}{2aaa} = 3a$.

2, $7x^5 : 3x^2 = \frac{7}{3} x^{5-2} = \frac{7}{3} x^3$;

c, Sollen gleichnamige Potenzen dividirt werden, so dividire die Coefficienten und Dignanden, und behalte den gemeinschaftlichen Exponenten bei.

z. B. $6a^3 : 2b^3 = \frac{6a^3}{2b^3} = 3\frac{a^3}{b^3} = 3\left(\frac{a}{b}\right)^3$;

$7x^5 : 3y^5 = \frac{7x^5}{3y^5} = \frac{7}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^5$;

$ax^m : by^m = \frac{ax^m}{by^m} = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{y}\right)^m$;

d, Die nullte Potenz einer jeden Zahl ist gleich Eins. z. B. $a^0 = 1$.

e, Jede negative Potenz ist gleich einem Bruche, dessen Zähler 1, und dessen Nenner dieselbe Potenz mit positivem Exponenten ist.

Es ist $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

1, $a^3 : a^2 = a$; $a^m : a^n = a^{m-n}$;

$a^2 : a^5 = a^{-3}$; $12a^4 : 4a^2 = 3a^2$;

$a^3 : a^{-2} = a^5$; $a^{-3} : a^2 = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$;

$a^{-3} : a^{-1} = a^{-2}$; $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$;

$a^{-m} : a^n = a^{m-n}$; $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m-(-n)}$

2, $a^m : a = a^{m-1}$; $a^{m-1} : a = a^{m-2}$;

$b^m : a^n = \frac{b^m}{a^n}$; $12a^7 : 4a^2 = 3a^5$

$12a^7 : 3a^{-4} = 4a^{11}$; $12a^{-m} : 3a = 4a^{-m-(+1)}$;

$ca^{18} : da^{-6} = \frac{ca^{24}}{d}$; $a : b^{-r} = \frac{a}{b^{-r}}$;

3, $2a^3 : 3b^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3$;

$ma^3 : nb^3 = \frac{m}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^3$;

$a^r : b^r = \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$;

$2a^r : b^r = 2\left(\frac{a}{b}\right)^r$;

$a^m : 2b^m = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^m$;

$2a^m : 3b^m = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^m$;

$ra^m : sb^m = \frac{r}{s}\left(\frac{a}{b}\right)^m$;

4, $(a+b)^m : a^m = 1+\left(\frac{b}{a}\right)^m$;

5, $(a-b)^m : a^m = \frac{(a-b)^m}{a^m} = 1-\left(\frac{b}{a}\right)^m$;

6, $(9a^4-4b^4):(3a^2-2b^2) = 3a^2+2b^2$;

7, $(bc^3 - c^3x):(b-x) = c^3$;

8, $(a^3+a^2b-ab^2-b^3):(a-b) = a^2+2ab+b^2$;

a^3-a^2b

$2a^2b-ab^2-b^3$

$2a^2b-2ab^2$

ab^2-b^3

ab^2-b^3

9. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 - b^2) = a^2 - b^2$;

$\underline{a^4 - a^2b^2}$

$-a^2b^2 + b^4$

$\underline{-a^2b^2 + b^4}$

---

10. $(6a^3 - 15a^2b + 9ab^2) : (2a^2 - 3ab) = 3a - 3b$;

$\underline{6a^3 - 9a^2b}$

$-6a^2b + 9ab^2$

$\underline{-6a^2b + 9ab^2}$

---

11. $(a^5b^2 - a^3b^3 - 3a^3b^6 + a^2b^4 + 3ab^7 - b^5) : (a^2b^2 - b^3) = a^3 - 3ab^4 + b^2$;

$\underline{a^5b^2 - a^3b^3}$

$-3a^3b^6 + a^2b^4 + 3ab^7 - b^5$

$\underline{-3a^3b^6 \qquad + 3ab^7}$

$+a^2b^4 - b^5$

$\underline{+a^2b^4 - b^5}$

---

12. $(y^6 - z^6) : (y - z) = y^5 + y^4z + y^3z^2 + y^2z^3 + yz^3 + z^4$;

$\underline{y^6 - y^5z}$

$-z^6 + y^5z$

$\underline{+y^5z - y^4z^2}$

$+y^4z^2 - z^6$

$\underline{+y^4z^2 \qquad - y^3z^3}$

$+y^3z^3 - z^6$

$\underline{+y^3z^3 \qquad - y^2z^3}$

13.) $12a^4b^{-8}c^3 : 3a^2b^{-3}c^5d^{-7} = 4a^2b^{-5}c^{-2}d^7 =$

$$\frac{4a^2d^7}{b^5c^2};$$

14.) $\frac{2}{3}x^{-3}y^2z^{-1} : \frac{3}{4}x^{-1}y^{-3}z^5 = \frac{8}{9}x^{-2}y^5z^{-6} =$

$$\frac{8y^5}{9x^2z^6};$$

15.) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b;$

$a^2 - ab$

$ab - b^2$

$ab - b^2$

16.) $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b) = a^2 + 2ab + b^2;$

$a^3 + a^2b$

$2a^2b + 3ab^2 + b^3$

$2a^2b + 2ab^2$

$ab^2 + b^3$

$ab^2 + b^3$

17. $(a^2 - 2ad - b^2 + d^2) : (a + b - d) = a - b - d;$

$\underline{a^2 \mp ad \qquad + ab}$

$-ab - ad - b^2 + d^2$

$\underline{-ab \qquad - b^2 \qquad + bd}$

$-ad + d^2 - bd$

$\underline{-ad + d^2 - bd}$

---

18. $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$

$\underline{a^3 \quad - a^2b}$

$+a^2b - b^3$

$\underline{+a^2b \quad - ab^2}$

$+ab^2 - b^3$

$\underline{+ab^2 - b^3}$

---

19. $(a^2 - b^2 - 2ac + c^2) : (a - b - c) = a + b - c$

$\underline{a^2 - ab - ac}$

$+ab - b^2 - ac + c^2$

$\underline{+ab - b^2 - cb}$

$-ac + cb + c^2$

$\underline{-ac + cb + c^2}$

---

20. $(9a^4 - 4b^4) : (3a^2 - 2b^2) = 3a^2 + 2b^2$;

$9a^4 \quad - 6a^2b^2$

$+ 6a^2b^2 - 4b^4$

$+ 6a^2b^2 - 4b^4$

---

21. $(21a^2 - 83ab - 27a + 22b^2 + 99b) : (3a - 11b) = 7a - 2b - 9$;

$21a^2 - 77ab$

$- 6ab - 27a + 22b^2 + 99b$

$- 6ab \quad + 22b^2$

$- 27a + 99b$

$- 27a + 99b$

---

22. $(3a^2 - ab + \frac{47}{2}ac - 10b^2 + 52bc - \frac{63}{2}c^2) : (a - 2b + 9c) = 3a + 5b - \frac{7}{2}c$;

$3a^2 - 6ab + 27ac$

$+ 5ab - \frac{7}{2}ac - 10b^2 + 52bc - \frac{63}{2}c^2$

$+ 5ab \quad - 10b^2 + 45bc$

$- \frac{7}{2}ac + 7bc - \frac{63}{2}c^2$

$- \frac{7}{2}ac + 7bc - \frac{63}{2}c^2$

---

23. $(15a^3 - 14a^2b + 24ab^2 - 7b^3) : (3a - b) = 5a^2 - 3ab + 7b^2$

$15a^3 - 5a^2b$

$-9a^2b + 24ab^2 - 7b^3$

$-9a^2b + 3ab^2$

$21ab^2 - 7b^3$

$21ab^2 - 7b^3$

---

24. $(\frac{3}{8}a^2 - \frac{17}{4}ab + \frac{107}{12}ac^2 + 10b^2 - \frac{88}{3}bc^2 - 2c^4) : (\frac{1}{4}a - 2b + bc^2) =$

$\frac{3}{2}a - 5b - \frac{1}{3}c^2$

$\frac{3}{8}a^2 - \frac{12}{4}ab + 9ac^2$

$-\frac{5}{4}ab - \frac{1}{12}ac^2 + 10b^2 - \frac{88}{3}bc^2 - 2c^4$

$-\frac{5}{4}ab + 10b^2 - 30bc^2$

$-\frac{1}{12}ac^2 + \frac{2}{3}bc^2 - 2c^4$

$-\frac{1}{12}ac^2 + \frac{3}{3}bc^2 - 2c^4$

Von dem Ausziehen der Quadrat-wurzel

1, Das Product von zwei gleichen Factoren heißt Quadratzahl od. die zweite Potenz. Einer der beiden gleichen Factoren heißt Dignand und die Zahl, welche angibt, wie vielmal eine Zahl als Factor gesetzt werden soll, heißt der Potenzexponent. Beim Wurzelausziehen heißt einer der zwei gleichen Factoren, aus denen die Quadratzahl entstanden ist, die Quadratwurzel, die Quadratzahl selbst heißt Radicand und der Potenzexponent wird zum Wurzelexponent.

$$6^2 = 36; 4^3 = 64$$
$$\sqrt{36} = 6; \sqrt[3]{64} = 4;$$

Was beim Potenzieren die Potenz ist, das ist bei dem Radicieren der Radicand; der Dignand erscheint beim Radicieren als Wurzel, und der Potenzexponent als Wurzelexponent.

2, Erheben die Zahlen, welche mit einer Ziffer geschrieben werden, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,

auf die 2. Potenz, und schreibe jede Quadratzahl unter den zugehörigen Dignanden!

1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9=
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81;

Wenn der Dignand mit einer Ziffer geschrieben wird, so (wird) hat die Quadratzahl ein od. zwei Ziffern.
Wird beim Potenziren die Quadratzahl mit ein od. zwei Ziffern geschrieben, u. es soll aus einer solchen ein- od. zweiziffrigen Quadratzahl die Quadratwurzel gezogen werden, so hat die Wurzel eine Ziffer.
Soll die Quadratwurzel aus einer Zahl gezogen werden, so müssen die Einer der Wurzel in den Einern, od. in den Einern und Zehnern des Radicanden gesucht werden.
Wenn ein zweiziffriger Dignand quadrirt wird, so hat die Quadratzahl 3 od. 4 Ziffern. Es läßt sich dies leicht erkennen, wenn man nur die niederste (10) u. die höchste (99) zweiziffrige Zahl zur 2. Potenz erhebt.

$$10^2 = 100;\ 99^2 = 9801.$$

Wird umgekehrt die Quadratwurzel aus einem Radicanden gezogen,

der mit 3 od. 4 Ziffern geschrieben wird, so hat die Wurzel 2 Ziffern.

4, Erhebt man eine Zahl, welche mit 3 Ziffern geschrieben wird, zur 2. Potenz, so hat die Quadratzahl 5 od. 6 Ziffern.

Man kann sich auch hievon überzeugen, wenn man die mindeste (100) u. die höchste (999) in die 2. Potenz erhebt.

z. B. $100^2 = 10000$, $999^2 = 998001$;

$1000^2 = 1000000$, $9999^2 = 9989001$,

Fährt man auf obige Weise fort zu bestimmen, wie viele Ziffern eine Quadratzahl haben kann, wenn der Radicand mit 4, 5, 6 Ziffern geschrieben wird so ergibt sich allgemein:

Jede Quadratzahl hat entweder doppelt so viele Ziffern als ihr Radicand, od. einen weniger.

Daraus läßt sich folgern:

Jeder Radicand hat entweder doppelt so viele Ziffern, als die daraus genommene Quadratwurzel, od. einen weniger.

Um die Ziffernanzahl einer Quadratwurzel

leicht zu erkennen, theilt man die Ziffern des Radicanden in Klassen, von der Rechten gegen die Linken, u. gibt jeder Klasse 2 Ziffern; die letzte od. höchste Klasse erhält bei einer ungeraden Zahl nur eine. Die Einer der Wurzel sind in der ersten Klasse zur Rechten, die Zehner in der 2. Klasse, die Hunderter in der 3. Klasse des Radicanden u. s. w. zu suchen.

So viele Klassen der Radicand hat, so viele Ziffern hat die Wurzel. Die Klassen werden durch Striche abgeschnitten, welche am besten oben stehen, damit sie nicht mit dem Decimalkomma verwechselt werden z. B.

5'76 oder 95'64'84.

5) Wenn der Dignand mit einer Ziffer geschrieben wird, so ist die Quadratzahl aus der Einmaleinstafel zu ersehen.

6) Wird der Dignand mit 2 Ziffern geschrieben, so besteht die Quadratzahl aus dem Quadrat der Zehner + dem doppelten Producte der

Zehner in die Einer + dem (doppelten) Quadrate der Einer.

Quadrirt man z. B. 12=(10+2) so erhält man:

$$\begin{array}{l} 10 + 2 \\ 10 + 2 \\ \hline 10^2 + 10 \cdot 2 \\ \quad + 10 \cdot 2 + 2^2 \\ \hline 10^2 + 2(10 \cdot 2) + 2^2 \end{array}$$

Bezeichnen 10 mit Z u. 2 mit E u. suche den Werth von $(Z+E)^2$.

$$\begin{array}{l} Z + E \\ Z + E \\ \hline Z^2 + ZE \\ \quad + ZE + E^2 \\ \hline Z^2 + 2(ZE) + E^2 \end{array}$$

Nennen wir 10 den 1. Theil u. 2 den 2 Theil so besteht das Quadrat eines zweizifferigen Dignanden aus dem Quadrate des 1. Theils + dem doppelten Producte des ersten Theils in den zweiten, + dem Quadrate des 2. Theils.

Bezeichnet man 10 mit a, u. 2 mit b, so erhält man:

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + a + b \\
+ a + b + b^2 \\
\hline
a^2 + 2(a + b) + b^2
\end{array}
$$

Ist die Seite eines Quadrats 10cm, u. man soll ein Quadrat bilden, dessen Seite = 12 cm; so muß die Seite des ersten Quadrats um 2 cm verlängert werden.

10cm

2²cm

10^2

10cm

1, aus dem Quadrate dessen Seite = 10cm lang.
2, aus 2 Rechtecken, von denen jedes zur Grundlinie 10cm zur Höhe 2cm hat.
3, aus dem Quadrate, dessen Seite = 2cm ist.

Wir haben also wieder:

$$10^2 + 2\cdot 10\cdot 2 + 2^2 \text{ oder}$$

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Erhebe 125 zur 2. Potenz u. weise nach, daß die Quadratzahl 1, aus dem Quadrat der Hundert 2, aus dem doppelten Producte der Zehner in die Einer, 3, aus dem Quadrate der Zehner. 4, aus dem doppelten Producte der der Summe der Hunderter u. Zehner in die Einer, 5, aus dem Quadrate der Einer besteht.

Bezeichnet man 100 mit a, 20 mit b, 5 mit c, so erh. man:

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline a^2+ab+ac \\ \quad +ab \quad +b^2+bc \\ \quad\quad +ac \quad +bc+c^2 \\ \hline a^2+2(ab)+2(ac)+b^2+2(bc)+c^2; \end{array}$$

Stelle die einzelnen Producte, aus welchen die Quadratzahl 125 besteht, an einem Quadrate anschaulich dar!

100+20·5

100·20

5^2

20

100^2

100+20

100+20·5

100

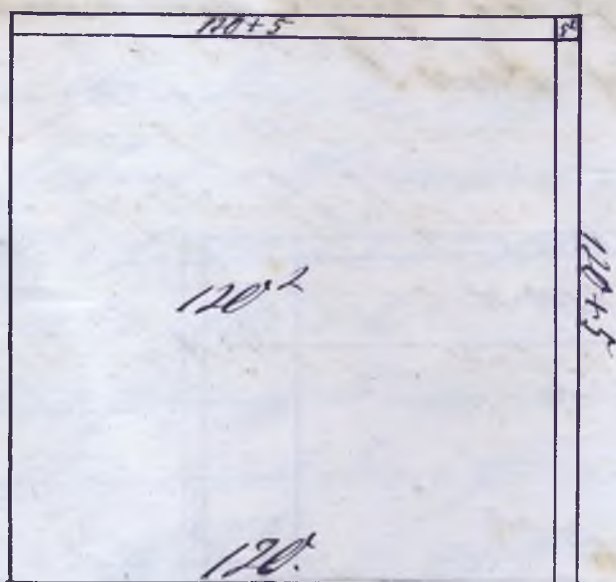
Betrachten wir 120 als den 1. Theil, u. 5 als den 2. Theil, so erhält man:

$$\begin{array}{l} 120+5 \\ 120+5 \\ \hline 120^2+120\cdot 5 \\ \quad +120\cdot 5+5^2 \\ \hline 120^2+2(120\cdot 5)+5^2 \end{array}$$

Setzen wir 120 = (a+b), so ist:

$$\begin{array}{l} (a+b)c \\ (a+b)c \\ \hline (a+b)^2+(a+b)c \\ \quad +(a+b)c+c^2 \\ \hline (a+b)^2+2(a+b)c+c^2. \end{array}$$

Es läßt sich auch dies durch Zeichnung darstellen.



Man kann die dreistellige Zahl 125 u. jede beliebige mehrstellige Zahl als zweistellige, aus Zehnern u. Einern bestehend darstellen.

z. B. 678 = 67 Z + 8 E.
= 670 + 8
9857 = 9850 + 7.

Wenn man daher auch die einzelnen Producte einer Quadratzahl, deren Wurzel mit 3, 4, 5 u. mehr Ziffern geschrieben wird, ebenso allgemein darstellen kann, wie die Producte, aus denen eine Quadratzahl besteht, deren Wurzel mit zwei oder drei Ziffern geschrieben wird, so betrachtet man daß jeder mehrstelligen Wurzeln

als einem zweitheiligen.
Es kann daher auch die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

als allgemeines Bild für die Theile einer jeden mehrtheiligen Quadratzahl betrachtet werden.

z. B. $65234^2 = (65230+4)^2 = 65230^2 + 2(65230 \cdot 4) + 4^2.$
$(65230+4)$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 30+6 \\ 30+6 \\ \hline 30^2 + 30 \cdot 6 \\ \quad + 30 \cdot 6 + 6^2 \\ \hline 30^2 + 2(30 \cdot 6) + 6^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 30^2 & = & 900 \\ 2(30 \cdot 6) & = & 360 \\ 6^2 & = & 36 \\ \hline & & 1296 \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sqrt{1296} = \overset{a}{30} + \overset{b}{6} = 36.$$

$$\begin{array}{l} 900 \; a^2 \\ \hline 396 : 60 = 2a \\ 360 = 2ab \\ \hline 36 \\ 36 = b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ 57 \\ \hline 399 \\ 285 \\ \hline 3249 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 50+7 \\ 50+7 \\ \hline 50^2+50\cdot7 \\ \quad +50\cdot7+7^2 \\ \hline 50^2+2(50\cdot7)+7^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 50^2 = & 2500 \\ 2(50\cdot7) = & 700 \\ 7^2 = & 49 \\ \hline & 3249 \end{array}$$

$$\sqrt{3249} = 50+7 = 57 \quad (a^2+2ab+b^2;\ a+b)$$

$$\begin{array}{l} \underline{2500 = a^2} \\ 749 : 100 = 2a \\ \underline{700\ 2ab} \\ 49 \\ \underline{49\ b^2} \\ \text{" "} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ 96 \\ \hline 576 \\ 864 \\ \hline 9216 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 90+6 \\ 90+6 \\ \hline 90^2+90\cdot6 \\ \quad +90\cdot6+6^2 \\ \hline 90^2+2(90\cdot6)+6^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 90^2 = & 8100 \\ 2(90\cdot6) = & 1080 \\ 6^2 = & 36 \\ \hline & 9216 \end{array}$$

$$\sqrt{9216} = 90+6 = 96. \quad (a^2+2ab+b^2;\ a+b)$$

$$\begin{array}{l} \underline{8100\ a^2} \\ 1116 : 180 = 2a \\ \underline{1080\ 2ab} \\ 36 \\ \underline{36\ b^2} \\ \text{" "} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 10+8 \\ 10+8 \\ \hline 10^2+10\cdot 8 \\ +10\cdot 8+8^2 \\ \hline 10^2+2(10\cdot 8)+8^2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 10^2 = & 100 \\ 2(10\cdot 8) = & 160 \\ 8^2 = & 64 \\ \hline & 324 \end{array}$$

$a^2+2ab+b^2$

$\sqrt{324} = \overset{a}{10} + \overset{b}{8} = 18$

$100 = a^2$

$224 : 20 = 2a$

$160 = 2ab$

64

$64 b^2$

" "

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 20+3 \\ 20+3 \\ \hline 20^2+20\cdot 3 \\ +20\cdot 3+3^2 \\ \hline 20^2+2(20\cdot 3)+3^2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 20^2 = & 400 \\ 2(20\cdot 3) = & 120 \\ 3^2 = & 9 \\ \hline & 529 \end{array}$$

$a^2+2ab+b^2$

$\sqrt{529} = \overset{a}{20} + \overset{b}{3} = 23$

$400 a^2$

$129 : 40 = 2a$

$120 = 2ab$

9

$9 b^2$

"

$$\begin{array}{r} 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 30+9 \\ 30+9 \\ \hline 30^2+30\cdot 9 \\ \quad +30\cdot 9+9^2 \\ \hline 30^2+2(30\cdot 9)+9^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30^2 = 900 \\ 2(30\cdot 9) = 540 \\ 9^2 = 81 \\ \hline 1521 \end{array}$$

~~$a^2+2ab+b^2$~~

$$\sqrt{1521} = \overset{a+b}{30+9} = 39$$

$$\begin{array}{l} \underline{900 = a^2} \\ 621 : 60 = 2a \\ \underline{540 = 2ab} \\ 81 \\ \underline{81 = b^2} \\ \text{" "} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 40+5 \\ 40+5 \\ \hline 40^2+40\cdot 5 \\ \quad +40\cdot 5+5^2 \\ \hline 40^2+2(40\cdot 5)+5^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

~~$a^2+2ab+b^2$~~

$$\begin{array}{r} 40^2 = 1600 \\ 2(40\cdot 5) = 400 \\ 5^2 = 25 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\sqrt{2025} = \overset{a+b}{40+5} = 45.$$

$$\begin{array}{l} \underline{1600 = a^2} \\ 425 : 80 = 2a \\ \underline{400 = 2ab} \\ 25 \\ \underline{25 = b^2} \\ \text{" "} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 59 \\ \hline 531 \\ 295 \\ \hline 3481 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 50+9 \\ 50+9 \\ \hline 50^2+50\cdot 9 \\ \quad +50\cdot 9+9^2 \\ \hline 50^2+2(50\cdot 9)+9^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 50^2 = & 2500 \\ +2(50\cdot 9) = & 900 \\ 9^2 = & 81 \\ \hline & 3481 \end{array}$$

~~$a^2+2ab+b^2$~~

$$\sqrt{3481} = \overset{a+b}{50+9} = 59$$

$2500 = a^2$

$981 : 100 = 2a$

$900 = 2ab$

81

$81 = b^2$

" "

$$\begin{array}{r} 64 \\ 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 60+4 \\ 60+4 \\ \hline 60^2+60\cdot 4 \\ \quad +60\cdot 4+4^2 \\ \hline 60^2+2(60\cdot 4)+4^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 60^2 = & 3600 \\ 2(60\cdot 4) = & 480 \\ 4^2 = & 16 \\ \hline & 4096 \end{array}$$

~~$a^2+2ab+b^2$~~

$$\sqrt{4096} = \overset{a+b}{60+4} = 64.$$

$3600 = a^2$

"$496 : 120 = 2a$

$480 = 2ab$

16

$16 = b^2$

" "

$$
\begin{array}{r}
76 \\
76 \\
\hline
456 \\
532 \\
\hline
5776
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
70+6 \\
70+6 \\
\hline
70^2+70\cdot 6 \\
\quad +70\cdot 6+6^2 \\
\hline
70^2+2(70\cdot 6)+6^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad +ab+b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcr}
70^2 & = & 4900 \\
2(70\cdot 6) & = & 840 \\
6^2 & = & 36 \\
\hline
 & & 5776
\end{array}
$$

~~$a^2+2ab+b^2$~~

$\sqrt{5776} = \overset{a+b}{70+6} = 76$

$4900 = a^2$

$'' 876 : 140 = 2a$

$840 = 2ab$

$'' \ 36$

$36 = b^2$

$'' \ ''$

$$
\begin{array}{r}
87 \\
87 \\
\hline
609 \\
696 \\
\hline
7569
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
80+7 \\
80+7 \\
\hline
80^2+80\cdot 7 \\
\quad +80\cdot 7+7^2 \\
\hline
80^2+2(80\cdot 7)+7^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
a^2+ab \\
\quad +ab+b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcr}
80^2 & = & 6400 \\
2(80\cdot 7) & = & 1120 \\
7^2 & = & 49 \\
\hline
 & & 7569
\end{array}
$$

~~$a^2+2ab+b^2$~~

$\sqrt{7569} = \overset{a+b}{80+7} = 87$

$6400 = a^2$

$1169 : 160 = 2a$

$1120 = 2ab$

49

$49 \ b^2$

$'' \ ''$

